

Exemple p. 95

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- on multiplie la 1^e ligne par $\frac{1}{2}$, ce qui correspond à multiplier A à gauche par la matrice élémentaire $E_1(\frac{1}{2})$. On a alors

$$\det(A) = \frac{\det(U)}{\det(E_1(\frac{1}{2}))}$$

$$\text{ou } U = E_1(\frac{1}{2})A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\det(A) = \frac{\det(U)}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \det(U), \text{ d'où}$$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

- on effectue ensuite des opérations élémentaires de type III pour faire apparaître des "0" aux positions 21, 31 et 41 (1^e colonne). Or les op. élémentaires de type III ne changent pas le déterminant. Ainsi :

$$|A| = 2 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ \textcircled{= 2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \\ \textcircled{= 2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} L_4 \rightarrow L_4 - 6L_1 \\ \textcircled{= 2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{array} \right|$$

- On peut ensuite développer par rapport à la 1^{re} colonne ou bien continuer à échelonner la matrice. Dans ce dernier cas, on multiplie la 2^e ligne par $-1/3$ et la 3^e ligne par $1/10$.

On a alors

$$U'' = E_3(1/10) E_2(-1/3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{pmatrix}}_{U'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/5 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \det(U') = 2 \cdot \frac{\det(U'')}{\det E_3(1/10) \cdot \det E_2(-1/3)} \\ &= 2 \cdot \frac{\det(U'')}{1/10 \cdot (-1/3)} = 2 \cdot 10 \cdot (-3) \det(U'') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\det(A) = 2 \cdot 10 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2/5 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{vmatrix}$$

- On effectue des op. élémentaires de type III pour obtenir des "0" aux positions 32 et 42 (2^e col.)
Comme les op. é. de type III ne changent pas le déterminant, il vient

$$\det(A) \stackrel{\uparrow}{=} 2 \cdot 10 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2/5 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{vmatrix}$$

$L_3 \rightarrow L_3 - L_2$

$$\stackrel{\uparrow}{=} 2 \cdot 10 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2/5 \\ 0 & 0 & 24 & -5 \end{vmatrix}$$

$L_4 \rightarrow L_4 - 16L_2$

- utilisons encore une op. é. de type III pour obtenir un "0" à la position 43:

$$\det(A) = 2 \cdot 10 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 \end{vmatrix}$$

- La matrice intermédiaire obtenue étant triangulaire supérieure, on aura finalement

$$\det(A) = 2 \cdot 10 \cdot (-3) \cdot \left(1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \right)$$

$$= \frac{120}{5} = 24$$